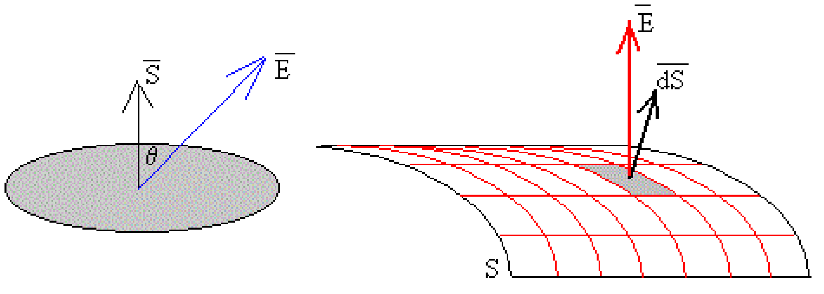
La ley de Gauss: es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, que relaciona el campo eléctrico con sus fuentes, las cargas

La ley de Gauss nos permite calcular de una forma simple el módulo del campo eléctrico, cuando conocemos la distribución de cargas con simetría esférica o cilíndrica tal como veremos:

Cuando el vector campo eléctrico $\vec{E}$ es constante en todos los puntos de una superficie S, se denomina flujo al producto escalar del vector campo por el vector superficie $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$



El vector superficie $\vec{S}$ es un vector que tiene por módulo el área de dicha superficie, la dirección es perpendicular al plano que la contiene.

Cuando el vector campo $\vec{E}$ y el vector superficie $\vec{S}$ son perpendiculares el flujo es cero

Si el campo no es constante o la superficie no es plana, se calcula el flujo a través de cada elemento $\vec{dS}$ de superficie, $\vec{E} \cdot \vec{dS}$. El flujo a través de la superficie S, es

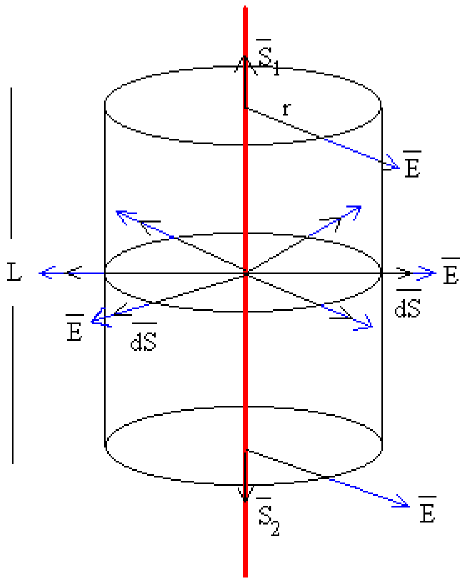
$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

La ley de Gauss afirma que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al cociente entre la carga que hay en el interior de dicha superficie dividido entre ε_0.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Vamos a ver algunos ejemplos típicos de aplicación de la ley de Gauss

Campo eléctrico producido por un hilo rectilíneo cargado



Para una línea indefinida cargada, la aplicación de la ley de Gauss requiere los siguientes pasos:

1. A partir de la simetría de la distribución de carga, determinar la dirección del campo eléctrico.

   La dirección del campo es radial y perpendicular a la línea cargada

2. Elegir una superficie cerrada apropiada para calcular el flujo

   Tomamos como superficie cerrada, un cilindro de radio *r* y longitud *L*.

   - Flujo a través de las bases del cilindro: el campo $\vec{E}$ y el vector superficie $\vec{S_1}$ o $\vec{S_2}$ forman 90º, luego el flujo es cero.
   - Flujo a través de la superficie lateral del cilindro: el campo $\vec{E}$ es paralelo al vector superficie $\vec{dS}$. El campo eléctrico $\vec{E}$ es constante en todos los puntos de la superficie lateral

   $$\int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_S E \cdot dS \cos 0º = E \int_S dS = E \cdot 2\pi rL$$

   El flujo total es, $E \cdot 2\pi\, rL$

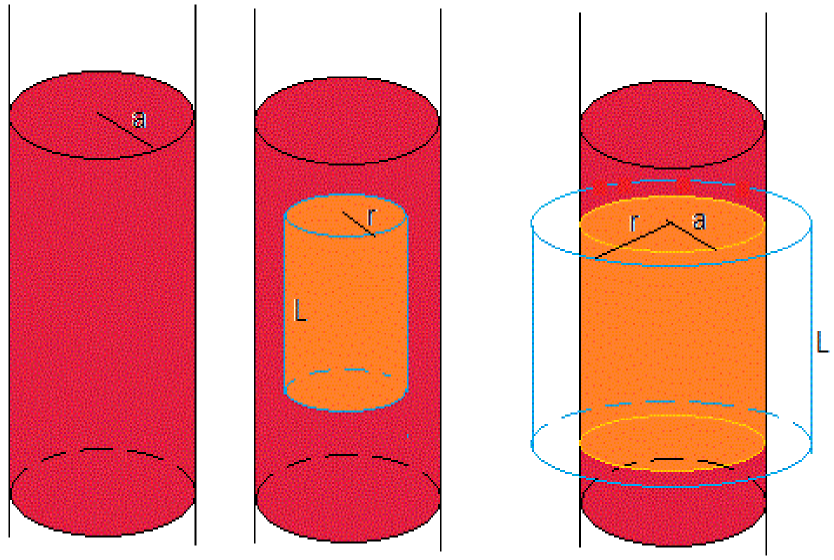
3. Determinar la carga que hay en el interior de la superficie cerrada

   La carga que hay en el interior de la superficie cilíndrica de longitud *L* y radio *r* es $q=\lambda\, L$, donde λ es la carga por unidad de longitud.

4. Aplicar la ley de Gauss y despejar el módulo del campo eléctrico

$$E 2\pi rL = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

Campo producido por un cilindro uniformente cargado



Un cilindro muy largo, macizo, de a=2 cm de radio, está uniformemente cargado en todo su volumen con una densidad de carga de $4\cdot10^{-6}$ C/m^3.

Conocida la carga q contenida en una superficie cilíndrica de radio r y longitud L, determinamos el módulo del campo eléctrico E aplicando la ley de Gauss

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rL}$$

1. Campo eléctrico para $r<a$

   Tomamos una superficie cilíndrica de radio r<2 cm y de altura L, véase la segunda figura. La carga contenida por esta superficie es

   $$q=4\cdot10^{-6}\pi r^2L=4\pi\cdot10^{-6}r^2L$$
   $$E=72\,000\pi\cdot r\,\mathrm{N/C}$$

2. Campo eléctrico para $r>a$

   Tomamos una superficie cilíndrica de radio r>2 cm y de altura L, véase la tercera figura. La carga contenida por esta superficie es

   $$q=4\cdot10^{-6}\pi(0.02)^2L=\pi\cdot1.6\cdot10^{-9}L$$
   $$E=\tfrac{28.8\pi}{r}\,\mathrm{N/C}$$

2. Campo eléctrico para $r>a$

   Tomamos una superficie cilíndrica de radio r>2 cm y de altura L, véase la tercera figura. La carga contenida por esta superficie es

   $$q = 4 \cdot 10^{-6} \pi (0.02)^2 L = \pi \cdot 1.6 \cdot 10^{-9} L$$
   $$E = \frac{28.8\pi}{r}\ \mathrm{N/C}$$

Calculamos la diferencial de potencial entre un punto situado en el eje del cilindro cargado y otro punto situado a una distancia de 15 cm de dicho eje

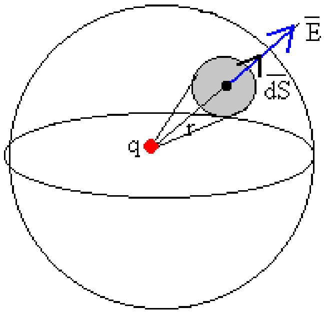
$$V_0 - V_{0.15} = \int_0^{0.15} E \cdot dr = \int_0^{0.02} 72\,000\,\pi r \cdot dr + \int_{0.02}^{0.15} \frac{28.8\pi}{r} \cdot dr = 227.5\ \mathrm{V}$$

Campo eléctrico de una distribución esférica y uniforme de carga

Para una distribución esférica y uniforme de carga, la aplicación de la ley de Gauss requiere los siguientes pasos:

1. A partir de la simetría de la distribución de carga, determinar la dirección del campo eléctrico.

   La distribución de carga tiene simetría esférica, la dirección del campo es radial



2. Elegir una superficie cerrada apropiada para calcular el flujo

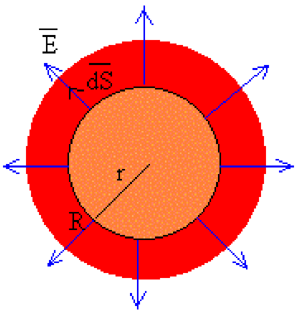
   Tomamos como superficie cerrada, una esfera concéntricade radio r.

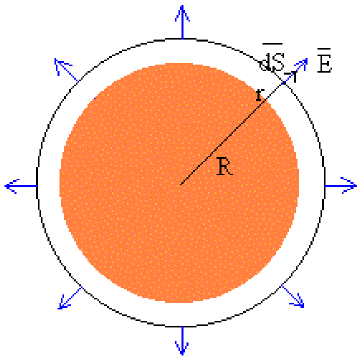
   El campo eléctrico $\vec{E}$ es paralelo al vector superficie $\vec{dS}$. Por simetría el campo es constante en todos los puntos de la superficie esférica de radio r, por lo que,

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_S E \cdot dS \cos 0º = E \int_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

El flujo total es, $E \cdot 4\pi r^2$

3. Determinar la carga que hay en el interior de la superficie cerrada





- Para $r<R$. (figura de la izquierda)

  Si estamos calculando el campo en el interior de la esfera uniformemente cargada, la carga que hay en el interior de la superficie esférica de radio r es una parte de la carga total (en color rosado), que se calcula multiplicando la densidad de carga por el volumen de la esfera de radio r.

  $$q = Q\frac{r^3}{R^3}$$

- Para $r>R$ (figura de la derecha)

  Si estamos calculando el campo en el exterior de la esfera uniformemente cargada, la carga que hay en el interior de la superficie esférica de radio r es la carga total $q=Q$.

4. Aplicar la ley de Gauss y despejar el módulo del campo eléctrico

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Se obtiene

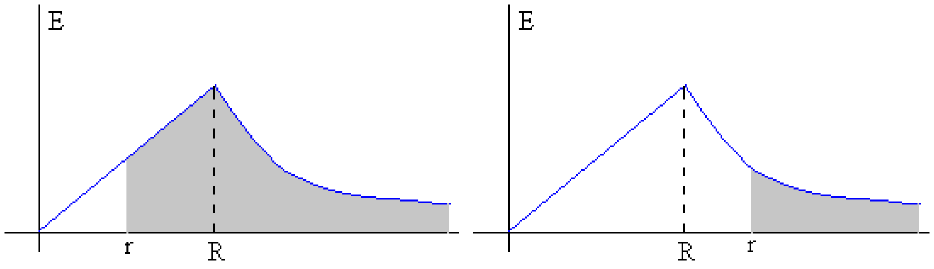
$$E = \frac{Qr}{4\pi\,\varepsilon_0\,R^3} \quad (r < R) \qquad E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \quad (r > R)$$

El campo en el exterior de una esfera cargada con carga Q, tiene la misma expresión que el campo producido por una carga puntual Q situada en su centro.

Potencial a una distancia *r* del centro de la esfera cargada

Se denomina potencial en un punto P a una distancia *r* del centro de la esfera cargada *V(r)* a la diferencia de potencial existente entre el punto P y el infinito *V*(*r*)-*V*(∞). Por convenio, se establece que en el infinito la energía potencial es cero.

Representamos el módulo del campo eléctrico *E*, en función de la distancia *r* al centro de la esfera cargada, en los intervalos 0< *r*<*R* y *r*>*R*



- *r*>*R*. Para hallar el potencial en un punto P que está fuera de la esfera cargada basta hallar el área sombreada (figura de la derecha)

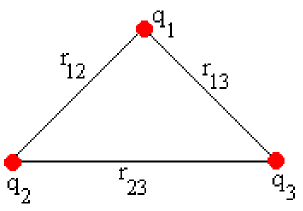
$$V=\int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r}$$

- *r*<*R*. Para calcular el potencial en un punto P, en el interior de la esfera cargada, es necesario sumar dos áreas, (figura de la izquierda)

$$V(r)=\int_r^R \frac{Qr}{4\pi\,\varepsilon_0 R^3}dr+\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 R}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Energía de una distribución de cargas

Vamos a calcular ahora la energía necesaria para formar la distribución uniforme de carga positiva. O bien, la energía que se liberaría cuando la distribución uniforme de carga positiva explotase de modo que cada parte de ella estuviese a una distancia infinita una de la otra.

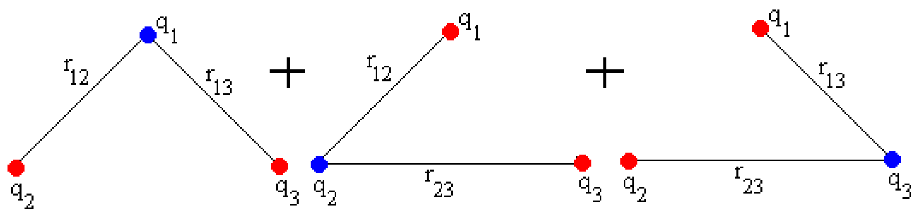


Determinaremos la expresión de la energía de un sistema de tres cargas y la generalizamos para una distribución continua de carga.

Consideremos un sistema de tres cargas puntuales fijas q_1, q_2 y q_3, tal como se indica en la figura.

La energía de este sistema U vale

$$U = E_{p12} + E_{p13} + E_{p23} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$



Llamando V_1 al potencial producido por las cargas q_2 y q_3 en la posición que ocupa q_1. La energía de la carga q_1 en el campo producido por las otras dos es

$$q_1 V_1 = q_1\left(\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}}\right) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Análogamente, llamando V_2 al potencial producido por las cargas q_1 y q_3 en la posición que ocupa q_2. La energía de la carga q_2 en el campo producido por las otras dos es

$$q_2 V_2 = q_2\left(\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{23}}\right) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Del mismo modo, llamando V_3 al potencial producido por las cargas q_1 y q_2 en la posición que ocupa q_3. La energía de la carga q_3 en el campo producido por las otras dos es

$$q_3 V_3 = q_3\left(\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Sumando estas tres contribuciones obtenemos el doble de la energía del sistema de partículas

$$U = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3) = \tfrac{1}{2}\sum q_i V_i$$

Energía de la esfera cargada

Volviendo de nuevo a la esfera uniformemente cargada, el potencial V_i se sustituye por el potencial en la posición r, $V(r)$ que hemos calculado previamente.

La carga q_i se sustituye por la carga que hay en la capa esférica comprendida entre r y $r+dr$. El volumen de dicha capa esférica es $4\pi r^2 dr$, y la carga que hay en este volumen vale (densidad de carga por volumen)

$$\frac{3Qr^2}{R^3}dr$$

La energía vale entonces

$$U=\frac{1}{2}\int_0^R V(r)dq=\frac{1}{2}\int_0^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{3Qr^2}{R^3}dr=\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$